Grado en Matemáticas

Ejercicios de Análisis Funcional – Relación 1 - Espacios normados. Conceptos básicos (para hacer en casa)

1. Sea X un espacio normado y sea $T : X \to X$ definida por:

$$T(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leqslant 1; \\ \dfrac{x}{\|x\|}, & \text{si } \|x\| > 1. \end{cases}$$

   Prueba que $\|T(x) - T(y)\| \leqslant 2\|x - y\|$ parar todos $x, y \in X$.

2. Prueba que en todo espacio normado se verifica que:

   a) La adherencia de una bola abierta es la correspondiente bola cerrada.

   b) El interior de una bola cerrada es la correspondiente bola abierta.

   c) El diámetro de una bola es igual al doble de su radio.

3. Sea X un espacio normado. Prueba que si $A \subset X$ es un conjunto abierto no vacío entonces $A + B$ es abierto cualquiera sea $B \subset X$. ¿Es cierto que la suma de dos conjuntos cerrados en X es un conjunto cerrado?

4. Sea X un espacio normado y $A \subset X$. Prueba que $\overline{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A + B(0, 1/n))$.

5. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio normado X. Prueba que

$$A + B(0, 1) = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) < 1\}.$$

   ¿Es cierto que $A + \overline{B}(0, 1) = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) \leqslant 1\}$?.

6. Sea X un espacio normado. Prueba que si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy de elementos no nulos de X que no converge a cero, entonces la sucesión $\left\{ \dfrac{x_n}{\|x_n\|} \right\}$ también es de Cauchy.

7. Sean $\| \cdot \|_1$ y $\| \cdot \|_2$ normas equivalentes sobre un espacio vectorial X. Sean B_1 y B_2 las bolas unidad cerradas en los espacios $(X, \| \, \|_1)$ y $(X, \| \, \|_2)$ respectivamente. Prueba que B_1 y B_2 son homeomorfas.

   Sugerencia. Considera la aplicación $g(x) = \dfrac{\|x\|_1}{\|x\|_2} x$.